< 2013年度数学コンクール ··· 問題と模範解答 >

問題1. $\triangle$ABC において，$\angle$B の二等分線が辺 AC と交わる点を D，$\angle$C の二等分線が辺 AB と交わる点を E とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) AB = AC であるとき，BD = CE であることを証明せよ。

(2) BD = CE であるとき，AB = AC であると言えるか。すなわち，$\triangle$ABC は二等辺三角形と言えるか。

< 1. の解答 >

(1) $\triangle$DBC と $\triangle$ECB において BC = CB は共通である。また、仮定 AB = AC より $\triangle$ABC は二等辺三角形となるから $\angle$ABC = $\angle$ACB が解る。これより

$$\angle \mathrm{DCB} = \angle \mathrm{EBC}, \qquad \angle \mathrm{DBC} = \angle \mathrm{ECB}$$

となるから、合同条件（一辺とその両端の角が等しい）より

$$\triangle \mathrm{DBC} \equiv \triangle \mathrm{ECB}$$

を得る。従って

$$\mathrm{BD} = \mathrm{CE}$$

が解る。 (証明終)

(2) BD = CE であれば AB = AC が成り立つ。これを示すために補題をふたつ準備する。

補題 1. $\triangle$ABC において

$$\mathrm{AC} < \mathrm{AB} \iff \angle \mathrm{ABC} < \angle \mathrm{ACB}$$

が成り立つ。

証明. $\Rightarrow$ を示す。AC < AB より、辺 AB 上に AM = AC となるような点 M をとることができる。このとき

$$\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{BCM} = \angle \mathrm{AMC} = \angle \mathrm{ACM}$$

となるから

$$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ACM} - \angle \mathrm{BCM} < \angle \mathrm{ACM} + \angle \mathrm{MCB} = \angle \mathrm{ACB}$$

が解る。

$\Leftarrow$ を示す。点 B と C を交換して $\Rightarrow$ で示して結果を用いれば

$$\mathrm{AC} > \mathrm{AB} \implies \angle \mathrm{ABC} > \angle \mathrm{ACB}$$

が成り立つことが解る。また

$$\mathrm{AC} = \mathrm{AB} \implies \angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ACB}$$

が成り立つことは明らかである。従って

$$\mathrm{AC} \geqq \mathrm{AB} \implies \angle \mathrm{ABC} \geqq \angle \mathrm{ACB}$$

も成り立つ。この対偶をとれば

$$\mathrm{AC} < \mathrm{AB} \impliedby \angle \mathrm{ABC} < \angle \mathrm{ACB}$$

が解る。 (証明終)

補題 2. $\triangle$ABC と $\triangle$A$'$B$'$C$'$ において

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'},\ \mathrm{AC} = \mathrm{A'C'},\ \angle \mathrm{BAC} < \angle \mathrm{B'A'C'} \implies \mathrm{BC} < \mathrm{B'C'}$$

が成り立つ。

証明. $\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}$ より、A と A′ および B と B′ を重ねることができる。このとき、$\angle\mathrm{CAC'}$ の二等分線と線分 BC′ の交点を D とすれば $\mathrm{DC}=\mathrm{DC'}$ となるから $\angle\mathrm{DCC'}=\angle\mathrm{DC'C}$ が解る。従って

$$\angle\mathrm{BCC'}=\angle\mathrm{BCD}+\angle\mathrm{DCC'}=\angle\mathrm{BCD}+\angle\mathrm{DC'C}=\angle\mathrm{BCD}+\angle\mathrm{BC'C}$$

より $\angle\mathrm{BC'C}<\angle\mathrm{BCC'}$ を得る。よって $\triangle\mathrm{BCC'}$ に補題 1 を適用すれば

$$\mathrm{BC}<\mathrm{BC'}=\mathrm{B'C'}$$

が解る。 (証明終)

注意. 余弦定理を用いて補題 2 を証明することもできる。

(2) $\mathrm{BD}=\mathrm{CE} \Rightarrow \mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の証明 : 背理法により示す。$\mathrm{AB}\neq\mathrm{AC}$ と仮定する。このとき $\mathrm{AC}<\mathrm{AB}$ と仮定しても一般性は失われない。$\mathrm{AC}<\mathrm{AB}$ であれば、補題 1 より $\angle\mathrm{ABC}<\angle\mathrm{ACB}$ となるから $\angle\mathrm{DBC}<\angle\mathrm{ECB}$ が解る。従って $\triangle\mathrm{BCD}$ と $\triangle\mathrm{CBE}$ において

$$\mathrm{BC}=\mathrm{CB},\qquad \mathrm{BD}=\mathrm{CE},\qquad \angle\mathrm{DBC}<\angle\mathrm{ECB}$$

が成り立つから、補題 2 より

$$\mathrm{CD}<\mathrm{BE}\quad\cdots\cdots\quad ①$$

が解る。

また、点 E を通り直線 BD に平行な直線と、点 D を通り直線 AB に平行な直線の交点を F とする。このとき、四角形 EBDF は平行四辺形となるから $\mathrm{EF}=\mathrm{BD}=\mathrm{CE}$ となる。よって $\triangle\mathrm{ECF}$ は二等辺三角形となるから $\angle\mathrm{EFC}=\angle\mathrm{ECF}$ が解る。このとき $\angle\mathrm{EFD}<\angle\mathrm{ECD}$ より

$$\angle\mathrm{DCF}=\angle\mathrm{ECF}-\angle\mathrm{ECD}<\angle\mathrm{EFC}-\angle\mathrm{EFD}=\angle\mathrm{DFC}$$

となる。従って、補題 1 より $\mathrm{DF}<\mathrm{DC}$ 即ち

$$\mathrm{BE}<\mathrm{CD}\quad\cdots\cdots\quad ②$$

が解る。

① と ② は矛盾するから $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ となることが解る。 (証明終)

別証明 : (2)「$\mathrm{BD}=\mathrm{CE} \Rightarrow \mathrm{AB}=\mathrm{AC}$」に別証明をつける。そのために補題をひとつ準備する。

補題 3. $\triangle\mathrm{ABC}$ において、$\angle\mathrm{A}$ の二等分線が辺 BC と交わる点を N とする。このとき

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BN}:\mathrm{NC}$$

が成り立つ。

証明. $\triangle\mathrm{ABN}$ の面積を S_1 とし、$\triangle\mathrm{ANC}$ の面積を S_2 とする。このとき、$\triangle\mathrm{ABN}$ と $\triangle\mathrm{ANC}$ に関して、BN と NC を底辺と考えれば高さは共通であるから

$$S_1:S_2=\mathrm{BN}:\mathrm{NC}$$

が成り立つ。また、AB と AC を底辺と考えれば高さは同じ長さとなるから

$$S_1:S_2=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$$

が成り立つ。従って

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BN}:\mathrm{NC}$$

が成り立つことが解る。 (証明終)

別証明 1 :「$\mathrm{BD}=\mathrm{CE} \Rightarrow \mathrm{AB}=\mathrm{AC}$」にベクトルを用いた証明をつける。$\mathrm{BC}=1$ と仮定しても一般性は失われない。このとき

$$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AB}},\qquad \vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とおき

$$c=|\vec{p}|=\mathrm{AB},\qquad b=|\vec{q}|=\mathrm{AC}$$

と定めれば、$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}$ より

$$|\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}| = \mathrm{BC} = 1$$

となる。よって

$$\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{q} - 2\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} = 1$$

より

$$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - 1) \quad \cdots\cdots \quad ③$$

を得る。また、補題 3 より

$$\mathrm{CD} : \mathrm{DA} = 1 : c$$

となるから、内分の公式より

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \frac{c\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}}}{1+c} = \frac{c(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}) - \overrightarrow{p}}{1+c} = \frac{c}{1+c}\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}$$

となる。従って ③ より

$$\begin{aligned}
\mathrm{BD}^2 &= \left(\frac{c}{1+c}\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}\right) \cdot \left(\frac{c}{1+c}\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}\right) \\
&= \left(\frac{c}{1+c}\right)^2 |\overrightarrow{q}|^2 - 2\frac{c}{1+c}\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{p}|^2 \\
&= \left(\frac{c}{1+c}\right)^2 b^2 - \frac{c}{1+c}(b^2 + c^2 - 1) + c^2 \\
&= c - \frac{b^2 c}{(c+1)^2}
\end{aligned}$$

が解る。

　全く同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \frac{b}{1+b}\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}$$

と ③ より

$$\mathrm{CE}^2 = b - \frac{bc^2}{(b+1)^2}$$

も解る。

　ここで仮定 $\mathrm{BD} = \mathrm{CE}$ を用いれば

$$c - \frac{b^2 c}{(c+1)^2} = b - \frac{bc^2}{(b+1)^2}$$

となる。この等式を移行して整理すると

$$(c - b)\left(1 + bc \cdot \frac{b^2 + bc + c^2 + 2b + 2c + 1}{(b+1)^2 (c+1)^2}\right) = 0$$

となるから　$c = b$　即ち

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$$

が解る。　(証明終)

別証明 2 :「BD = CE $\Rightarrow$ AB = AC」に余弦定理を用いた証明をつける。別証明 1 のときと同様に BC = 1 としてよい。このとき

$$\mathrm{AB} = c, \qquad \mathrm{CA} = b$$

とおくと $b > 0,\ c > 0$ であり

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - 1}{2bc}$$

となる。また，補題 3 より

$$\mathrm{AD} : \mathrm{DC} = c : 1 \qquad\qquad \mathrm{AE} : \mathrm{EB} = b : 1$$

となるから

$$\mathrm{AD} = \frac{c}{c+1}\mathrm{AC} = \frac{bc}{c+1} \qquad\qquad \mathrm{AE} = \frac{b}{b+1}\mathrm{AB} = \frac{bc}{b+1}$$

が成り立つ。従って，余弦定理より

$$\begin{aligned}
\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos A \\
&= c^2 + \left(\frac{bc}{c+1}\right)^2 - 2c\cdot\frac{bc}{c+1}\cdot\frac{b^2+c^2-1}{2bc} \qquad \boxed{\downarrow\text{ ここを根気よく計算すると...}} \\
&= c^2 + \frac{b^2c^2}{(c+1)^2} - \frac{c(b^2+c^2-1)}{c+1} \left[= \frac{c^2(c+1)^2 + b^2c^2 - c(c+1)(b^2+c^2-1)}{(c+1)^2} = c - \frac{b^2c}{(c+1)^2}\right] \\
\mathrm{CE}^2 &= \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AE}^2 - 2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AE}\cos A \\
&= b^2 + \left(\frac{bc}{b+1}\right)^2 - 2b\cdot\frac{bc}{b+1}\cdot\frac{b^2+c^2-1}{2bc} \\
&= b^2 + \frac{b^2c^2}{(b+1)^2} - \frac{b(b^2+c^2-1)}{b+1}
\end{aligned}$$

が解る。BD = CE より $\mathrm{BD}^2 - \mathrm{CE}^2 = 0$ となるから

$$c^2 + \frac{b^2c^2}{(c+1)^2} - \frac{c(b^2+c^2-1)}{c+1} - \left\{b^2 + \frac{b^2c^2}{(b+1)^2} - \frac{b(b^2+c^2-1)}{b+1}\right\} = 0$$

$$(c^2-b^2) + \frac{b^2c^2}{(b+1)^2(c+1)^2}\left\{(b+1)^2 - (c+1)^2\right\} - \frac{b^2+c^2-1}{(b+1)(c+1)}\left\{c(b+1) - b(c+1)\right\} = 0$$

$$(c-b)(b+c) + \frac{b^2c^2}{(bc+b+c+1)^2}(b+c+2)(b-c) - \frac{b^2+c^2-1}{bc+b+c+1}(c-b) = 0$$

$$(c-b)\left\{(b+c) - \frac{(bc)^2}{(bc+b+c+1)^2}(b+c+2) - \frac{(b+c)^2-2bc-1}{bc+b+c+1}\right\} = 0\cdots(*)$$

となる。ここで

$$u = b + c, \qquad v = bc$$

とおくと，u, v は条件 $u > 0,\ v > 0$ (かつ $u^2 - 4v \geqq 0$) を満たす。これを用いて $(*)$ の中括弧のなかを計算すれば

$$
\begin{aligned}
\{\cdots\} &= u - \frac{v^2(u+2)}{(v+u+1)^2} - \frac{u^2-2v-1}{v+u+1} \\
&= \frac{u(u+v+1)^2-(uv^2+2v^2)-(u^2-2v-1)(u+v+1)}{(u+v+1)^2} \\
&= \frac{u(u^2+v^2+2uv+2u+2v+1)-uv^2-2v^2-(u^3+u^2v+u^2-2uv-2v^2-u-3v-1)}{(u+v+1)^2} \\
&= \frac{u^2v+4uv+u^2+2u+3v+1}{(u+v+1)^2} \quad \boxed{\text{ここで} > 0 \text{ は判定できる}} \\
&= \frac{(u^2+4u+3)v+(u^2+2u+1)}{(u+v+1)^2} \\
&= \frac{(u+1)(u+3)v+(u+1)^2}{(u+v+1)^2} \\
&= \frac{(u+1)\left\{(u+3)v+(u+1)\right\}}{(u+v+1)^2} \\
&= \frac{(b+c+1)\left\{(b+c+3)bc+(b+c+1)\right\}}{(b+c+bc+1)^2} \\
&= \frac{(b+c+1)(b^2c+bc^2+3bc+b+c+1)}{(b+1)^2(c+1)^2} > 0
\end{aligned}
$$

となる。従って $(*)$ より $c-b=0$ すなわち $b=c$ を得る。 (証明終)

別証明 1, 別証明 2 を少々修正すれば次の定理を示すことができる。

定理. $\triangle$ABC において，$\angle$B の二等分線が辺 AC と交わる点を D とし，$\angle$C の二等分線が辺 AB と交わる点を E とする。このとき

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AB} < \mathrm{AC} &\iff \mathrm{BD} < \mathrm{CE} \\
\mathrm{AB} = \mathrm{AC} &\iff \mathrm{BD} = \mathrm{CE} \\
\mathrm{AB} > \mathrm{AC} &\iff \mathrm{BD} > \mathrm{CE}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

問題 2. n を 4 以上の整数とする。階段を上がるとき，2 段飛ばしで（3 段一度に）上がることのできる人がいる。この人が 1 段ずつか，1 段飛ばしか，2 段飛ばしかのいずれかの方法を自由に使って n 段の階段を上がる方法を調べたい。ただし，この人は 3 段以上飛ばしては上がれないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $n = 5$ のとき，階段を上がる方法は何通りあるか。

(2) 一般の n について，この階段を上がる方法は何通りあるか。その総数を n の式で表せ。

＜ **2.** の解答＞

(1) n 段目まで登る方法の総数を a_n とおくと，数列 $\{a_n\}$ は

① $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4$

② $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$

を満たす。①②より $a_4 = 4 + 2 + 1 = 7,\ a_5 = 7 + 4 + 2 = \boxed{13}$ である。

(2) 仮に $a_n = Cr^{n-1}$ とおくと，②より

$$Cr^{n+2} = Cr^{n+1} + Cr^n + Cr^{n-1}$$

だから，r は

③ $r^3 - r^2 - r - 1 = 0$

を満たす。③の解を $r = r_1,\ r_2,\ r_3$ とし，定数 $C_1,\ C_2,\ C_3$ に対して

④ $a_n = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + C_3 r_3^{n-1}$

とおくと，

$$\begin{aligned}
&a_{n+2} + a_{n+1} + a_n \\
&= C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1} + C_3 r_3^{n+1} + C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + C_3 r_3^n + C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + C_3 r_3^{n-1} \\
&= C_1(r_1^2 + r_1 + 1) r_1^{n-1} + C_2(r_2^2 + r_2 + 1) r_2^{n-1} + C_3(r_3^2 + r_3 + 1) r_3^{n-1} \\
&= C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + C_3 r_3^{n+2} = a_{n+3}
\end{aligned}$$

より数列 $\{a_n\}$ は②を満たす。①より

⑤ $\begin{cases} a_1 &= C_1 + C_2 + C_3 &= 1 \\ a_2 &= C_1 r_1 + C_2 r_2 + C_3 r_3 &= 2 \\ a_3 &= C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 + C_3 r_3^2 &= 4 \end{cases}$

を満たす $C_1,\ C_2,\ C_3$ を求めればよい。

3 次方程式③を解く。$r = \dfrac{x+1}{3}$ とおくと，x は

③$'$ $x^3-12x-38=0$

を満たす。これを解くために

$$x^3-3abx-(a^3+b^3)=\{x-(a+b)\}\{x^2+(a+b)x+a^2-ab+b^2\}$$

より，$ab=4,\ a^3+b^3=38$ とおくと，$a^3b^3=64$ だから a^3 と b^3 は 2 次方程式 $t^2-38t+64=0$ の解となるので，$t=19\pm3\sqrt{33}$ より例えば

$$a=\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}},\ b=\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}$$

を得る。この a,b に対し

$$x_1=a+b,\quad x_2=-\frac{a+b}{2}+\frac{\sqrt{3}(b-a)}{2}i,\quad x_3=-\frac{a+b}{2}-\frac{\sqrt{3}(b-a)}{2}i$$

とおくと $x=x_1,\ x_2,\ x_3$ は③$'$ の解である。ただし i は虚数単位である。$r_k=\dfrac{x_k+1}{3}$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ とおくと，$r=r_1,\ r_2,\ r_3$ は③の解である。ここで

$$s=\frac{2-a-b}{6}\ ,\quad t=\frac{\sqrt{3}(b-a)}{6}$$

とおくと

$$r_1=1-2s,\quad r_2=s+ti,\quad r_3=s-ti$$

となる。この $r_1,\ r_2,\ r_3$ に対して⑤を満たす $C_1,\ C_2,\ C_3$ を求めると

$$C_1=\frac{s^2+t^2+4-4s}{(r_1-s)^2+t^2},\quad v=\frac{1-C_1}{2},\quad w=\frac{C_1(r_1-s)+s-2}{2t}$$

$$C_2=v+wi,\quad C_3=v-wi$$

となる。よって④より一般項は

$$\boxed{a_n=C_1r_1^{n-1}+(v+wi)(s+ti)^{n-1}+(v-wi)(s-ti)^{n-1}}$$

と表される。

なお複素数 $z=x+yi$ の共役複素数を $\overline{z}=x-yi$ で表すと

$$\overline{z_1z_2}=\overline{(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)}=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i}$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)i=(x_1-y_1i)(x_2-y_2i)=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

となる。このことから

$$\overline{(s+ti)^{n-1}}=(s-ti)^{n-1},\quad \overline{(v+wi)(s+ti)^{n-1}}=(v-wi)(s-ti)^{n-1}$$

より $(v+wi)(s+ti)^{n-1}$ と $(v-wi)(s-ti)^{n-1}$ は互いに共役な複素数になるので，

その和は実数になる。

<**2.**(2) の別解>

②を変形して

(∗) $a_{n+3}-\alpha a_{n+2}-\beta a_{n+1}=r(a_{n+2}-\alpha a_{n+1}-\beta a_n)$

と書ければ

(∗∗) $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}-\beta a_n=(a_3-\alpha a_2-\beta a_1)r^{n-1}$

となって 2 項間漸化式を得る。(∗) を移項してまとめた式

$$a_{n+3}-(\alpha+r)a_{n+2}+(\alpha r-\beta)a_{n+1}+r\beta a_n=0$$

と

② $a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+a_n$

の係数を比較して,

$$\alpha+r=1,\quad \alpha r-\beta=-1,\quad r\beta=-1$$

より $\alpha=1-r$, $\beta=1+r-r^2$ だから, r は

③ $r^3-r^2-r-1=0$

を満たす。③の解を $r=r_1$, r_2, r_3 とする。3 次方程式③の解と係数の関係より

$$r_1+r_2+r_3=1,\quad r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=-1,\quad r_1r_2r_3=1$$

から $1-r_1=r_2+r_3$, $r_1^2-r_1-1=r_2r_3$ を得る。$r=r_1$ に対し, $\alpha=1-r_1=r_2+r_3$,

$\beta=1+r_1-r_1^2=-r_2r_3$ より $A=a_3-\alpha a_2-\beta a_1=a_3-(r_2+r_3)a_2+r_2r_3a_1$

とおくと, (∗∗) より

$$a_{n+2}-(r_2+r_3)a_{n+1}+r_2r_3a_n=Ar_1^{n-1}$$

$$a_{n+2}-r_3a_{n+1}=r_2(a_{n+1}-r_3a_n)+Ar_1^{n-1}$$

を得る。$a_{n+1}-r_3a_n=b_n$ とおくと, $b_{n+1}=r_2b_n+Ar_1^{n-1}$ であり, $b_1=a_2-r_3a_1$

$$b_2=r_2b_1+A,\quad b_3=r_2b_2+Ar_1=r_2^2b_1+A(r_2+r_1)$$

$$b_n=r_2^{n-1}b_1+A\left(r_2^{n-2}+r_2^{n-3}r_1+\cdots+r_2r_1^{n-3}+r_1^{n-2}\right)=r_2^{n-1}b_1+A\frac{r_2^{n-1}-r_1^{n-1}}{r_2-r_1}$$

$$=\frac{A}{r_1-r_2}r_1^{n-1}+\left(b_1+\frac{A}{r_2-r_1}\right)r_2^{n-1}=K_1r_1^{n-1}+K_2r_2^{n-1}$$

を得る。ここで $K_1=\dfrac{A}{r_1-r_2}$, $K_2=b_1+\dfrac{A}{r_2-r_1}$ である。

$a_{n+1}-r_3a_n=b_n=K_1r_1^{n-1}+K_2r_2^{n-1}$ より, $a_{n+1}=r_3a_n+K_1r_1^{n-1}+K_2r_2^{n-1}$ だから

$a_2 = r_3 a_1 + K_1 + K_2$,　$a_3 = r_3 a_2 + K_1 r_1 + K_2 r_2 = r_3^2 a_1 + K_1(r_3 + r_1) + K_2(r_3 + r_2)$

$$\begin{aligned}
a_n &= r_3^{n-1} a_1 + K_1\left(r_3^{n-2} + r_3^{n-3} r_1 + \cdots + r_3 r_1^{n-3} + r_1^{n-2}\right) \\
&\qquad\qquad +K_2\left(r_3^{n-2} + r_3^{n-3} r_2 + \cdots + r_3 r_2^{n-3} + r_2^{n-2}\right) \\
&= r_3^{n-1} a_1 + K_1 \frac{r_3^{n-1} - r_1^{n-1}}{r_3 - r_1} + K_2 \frac{r_3^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_3 - r_2} \\
&= \left(\frac{K_1}{r_1 - r_3}\right) r_1^{n-1} + \left(\frac{K_2}{r_2 - r_3}\right) r_2^{n-1} + \left(a_1 + \frac{K_1}{r_3 - r_1} + \frac{K_2}{r_3 - r_2}\right) r_3^{n-1} \\
&= C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + C_3 r_3^{n-1}
\end{aligned}$$

とおく。3 次方程式③の解は，$a = \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}$, $b = \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}$

$s = \dfrac{2 - a - b}{6}$ ，$t = \dfrac{\sqrt{3}(b - a)}{6}$ とおくと，　$r_1 = 1 - 2s$,　$r_2 = s + ti$,　$r_3 = s - ti$ となる。このとき $A = a_3 - (r_2 + r_3)a_2 + r_2 r_3 a_1 = s^2 + t^2 - 4s + 4$, $K_1 = \dfrac{A}{r_1 - r_2}$

$$C_1 = \frac{K_1}{r_1 - r_3} = \frac{A}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} = \frac{A}{r_1^2 - 2sr_1 + s^2 + t^2} = \frac{s^2 + t^2 - 4s + 4}{(r_1 - s)^2 + t^2}$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= b_1 + \frac{A}{r_2 - r_1} = a_2 - r_3 a_1 + \frac{A}{r_2 - r_1} = 2 - s + ti + \frac{A}{s + ti - r_1} \\
&= 2 - s + ti + \frac{A(s - r_1 - ti)}{(s - r_1)^2 + t^2} = 2 - s + ti + C_1(s - r_1 - ti) \\
&= \Big(2 - s + C_1(s - r_1)\Big) + (1 - C_1)ti
\end{aligned}$$

となる。ここで $v = \dfrac{1 - C_1}{2}$,　$w = \dfrac{C_1(r_1 - s) + s - 2}{2t}$ とおくと

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{K_2}{r_2 - r_3} = \frac{\Big(2 - s + C_1(s - r_1)\Big) + (1 - C_1)ti}{2ti} \\
&= \frac{1 - C_1}{2} + \frac{C_1(r_1 - s) + s - 2}{2t} i = v + wi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 &= a_1 + \frac{K_1}{r_3 - r_1} + \frac{K_2}{r_3 - r_2} = 1 - C_1 - C_2 = 1 - C_1 - v - wi = 1 - C_1 - \frac{1 - C_1}{2} - wi \\
&= \frac{1 - C_1}{2} - wi = v - wi
\end{aligned}$$

となる。よって一般項は

$$\boxed{a_n = C_1 r_1^{n-1} + (v + wi)(s + ti)^{n-1} + (v - wi)(s - ti)^{n-1}}$$

と表される。

問題 3. n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 n は，無理数 α と有理数 r を用いて α^r の形に表せることを証明せよ。

(2) 任意の自然数 n は，有理数 r と無理数 α を用いて r^α の形に表せると言えるか。さらに，任意の自然数 n は 2 つの無理数 α と β を用いて α^β の形に表せると言えるか。

< **3.** の解答 >

(1) $n = 1$ のとき

$1 = (\sqrt{2})^0$ であるからよい。

$n \geqq 2$ のとき

n の素因数分解を

$n = {p_1}^{r_1}{p_2}^{r_2}\cdots{p_k}^{r_k} \quad (p_i:$ 素数，$r_i:$ 自然数$)$

とし，全ての $r_1, r_2, \ldots, r_k$ よりも大きい自然数 r をとる。

このとき $\sqrt[r]{n}$ が無理数であることを示す。

$\because)$ $\sqrt[r]{n}$ が有理数とし，l, m を

$$\sqrt[r]{n} = \frac{l}{m}\text{(既約分数)}$$

となるような互いに素である自然数とする。すると

$${p_1}^{r_1}{p_2}^{r_2}\cdots{p_k}^{r_k}m^r = l^r$$

となるから，l は素因数として全ての $p_1, p_2, \ldots, p_k$ を含む。l がそれ以外の素因数を持つとすると, l , m が互いに素であることに反するので，l の素因数は $p_1, p_2, \ldots, p_k$ のみである。すると $m = 1$ であることもわかる。l^r を素因数分解したとき $p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$ の指数は r 以上であるため r_i と一致せず, $n \neq l^r$ となり，矛盾が導かれる。□

したがって，$\sqrt[r]{n}$ は無理数で

$$n = (\sqrt[r]{n})^r$$

は求める表示である。

(2) $n=1$ のとき

例えば $1=1^{\sqrt{2}}$ とかけるからよい。

$n \geqq 2$ のとき

n の素因数分解を

$$n={p_1}^{r_1}{p_2}^{r_2}\cdots{p_k}^{r_k} \quad (p_i: 素数, r_i: 自然数)$$

として，どの $p_i \quad (i=1,2,\ldots,k)$ よりも大きい素数 p をとる。このとき，

$\log_p n$ は無理数である。——(*)

∵) いま，$\log_p n$ が有理数であるとして，

$$\log_p n=\frac{l}{m} \quad (既約分数)$$

とすると，定義より

$$n=p^{\frac{l}{m}} \quad \therefore n^m=p^l$$

左辺の素因数は $p_1,p_2,\ldots,p_k$ のみであるから，これは矛盾である。

したがって，$\log_p n$ は無理数である。□

さて、一般に，n に対して上のような素数 p を用いて

$$n=p^{\log_p n}$$

とかけるから，すべての自然数 n が

$$n=r^\alpha \quad (r: 有理数，\alpha: 無理数)$$

と表されることが示された。

後半については $n \geqq 2$ のとき，

$$n=p^{\log_p n}=(\sqrt{p})^{2\log_p n}$$

とかけること，しかも $\sqrt{p}$ が無理数，$2\log_p n$ が無理数であるからよい。

しかし，$n=1$ のとき，

$$1=\alpha^\beta \quad (\alpha,\beta: 無理数)$$

とかけたとすると，$\alpha \neq 1$ であるから，両辺の α を底とする対数をとって

$$0=\log_\alpha 1=\beta\log_\alpha\alpha=\beta$$

を得る。これは β が無理数であることに反する。したがって $n=1$ は α^β $(\alpha,\beta:$ 無理数$)$ の形にかけない。

問題 4. n を４以上の整数とし，空間内に n 個の点が与えられている。ただし，これらの点すべてが同一平面上にあるわけではないとする。このとき， n 個の点のうち丁度３点だけを通る平面が少なくとも１つ存在することを証明せよ。

与えられた点を「４個以上含んでいる直線」がある場合は，上の主張が成り立たないことがあります。
(反例)
xyz 空間内で８個の点

$$\mathrm{P}_1(-1,0,0), \mathrm{P}_2(0,0,0), \mathrm{P}_3(1,0,0), \mathrm{P}_4(2,0,0), \mathrm{P}_5(0,-1,1), \mathrm{P}_6(0,0,1), \mathrm{P}_7(0,1,1), \mathrm{P}_8(0,2,1)$$

をとる。４点を通る２本の直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ と $\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6\mathrm{P}_7\mathrm{P}_8$ はねじれの位置にある。
これらの点のうち，ちょうど３個だけを通る平面は存在しない。

問題を以下のように修正します :

問題 4′. n を４以上の整数とし，空間内に n 個の点が与えられている。ただし，これらの点すべてが同一平面上にあるわけではなく，かつ，どの３点も同一直線上にはないものとする。このとき， n 個の点のうち丁度３点だけを通る平面が少なくとも１つ存在することを証明せよ。

(証明)
与えられた点のうち１つを固定して P_0 とし，残りの点を $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_{n-1}\,(n \geqq 4)$ とする。
点 P_0 と他の点 $\mathrm{P}_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ を結んだ直線 ℓ_i は有限個 ($n-1$ 個) だから，これらのどの直線とも平行ではない平面で点 P_0 を通らないものが存在する。このような平面を１つとり π_0 とする。
直線 ℓ_i と平面 π_0 の交点を Q_i とすると，与えられた点のどの３点も同一直線上にはないので,

$$i \neq j \Rightarrow \mathrm{Q}_i \neq \mathrm{Q}_j$$

となる。また， $k \geqq 2$ のとき,

点 P_0 と点 $\mathrm{P}_{i_1}, \mathrm{P}_{i_2}, \cdots, \mathrm{P}_{i_k}$ が同一平面上にある
$\iff$ 平面 π_0 上において，点 $\mathrm{Q}_{i_1}, \mathrm{Q}_{i_2}, \cdots, \mathrm{Q}_{i_k}$ が同一直線上にある

が成り立つ。従って,

平面 π_0 上において， $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \cdots, \mathrm{Q}_{n-1}$ の中のちょうど２点 $\mathrm{Q}_i, \mathrm{Q}_j$ だけを通る直線が存在する $\cdots (*)$

ことを示せば，ちょうど３点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_i, \mathrm{P}_j$ を通る平面が存在することが分かる。以下， $(*)$ が成り立つことを示す。
与えられた点すべてが同一平面上にあるわけではないので,

平面 π_0 上において，点 $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \cdots, \mathrm{Q}_{n-1}$ すべてが同一直線上にあるわけではない

ことが分かる。
$\mathcal{Q} = \{\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \cdots, \mathrm{Q}_{n-1}\}$ とし， $\mathcal{Q}$ の中の少なくとも２点を通る直線全体の集合を $\mathcal{L}$ と置くと， $\mathcal{Q}, \mathcal{L}$ は共に有限集合である。 $\mathcal{Q}$ の点 Q_i と点 Q_i を通らない $\mathcal{L}$ の直線 ℓ との距離 $d(\mathrm{Q}_i, \ell)$ を Q_i から ℓ へ下ろした垂線の長さとする。

$$S = \{d(\mathrm{Q}_i, \ell) | \mathrm{Q}_i \in \mathcal{Q}, \ell \in \mathcal{L}, \mathrm{Q}_i \notin \ell\}$$

とすると， $\mathcal{Q}$ の点すべてが同一直線上にあるわけではないので， $S \neq \varnothing$ であり， S は有限集合だから最小値 d_0 をもつ。

$$d_0 = d(\mathrm{Q}_{i_0}, \ell_0), \quad \mathrm{Q}_{i_0} \in \mathcal{Q}, \quad \ell_0 \in \mathcal{L}, \quad \mathrm{Q}_{i_0} \notin \ell_0$$

とする。
この直線 ℓ_0 が $\mathcal{Q}$ の中のちょうど２点だけを通ることを示すために，直線 ℓ_0 上に $\mathcal{Q}$ の３点 $\mathrm{Q}_{i_1}, \mathrm{Q}_{i_2}, \mathrm{Q}_{i_3}$ が存在することを仮定して矛盾を導く。
点 Q_{i_0} から直線 ℓ_0 へ垂線 $\mathrm{Q}_{i_0}\mathrm{H}$ を下ろす。直線 ℓ_0 を点 H を端点とする２つの半直線に分けたとき,

３点 $\mathrm{Q}_{i_1}, \mathrm{Q}_{i_2}, \mathrm{Q}_{i_3}$ のうち

少なくとも２点 $\mathrm{Q}_{i_1}, \mathrm{Q}_{i_2}$ が同じ半直線に含まれ，点 Q_{i_2} の方が点 Q_{i_1} よりも点 H に近い

と仮定しても一般性は失われない。
点 $\mathrm{H}, \mathrm{Q}_{i_2}$ から直線 $\mathrm{Q}_{i_0}\mathrm{Q}_{i_1}$ へ垂線 $\mathrm{HH}', \mathrm{Q}_{i_2}\mathrm{Q}'_{i_2}$ をそれぞれ下ろす。直角三角形 $\mathrm{HQ}_{i_0}\mathrm{Q}_{i_1}$ に注目すると

$$d\,(\mathrm{Q}_{i_2}, \mathrm{Q}_{i_0}\mathrm{Q}_{i_1}) = \mathrm{Q}_{i_2}\mathrm{Q}'_{i_2} \leqq \mathrm{HH}' < \mathrm{Q}_{i_0}\mathrm{H} = d(\mathrm{Q}_{i_0}, \ell_0) = d_0$$

が得られるが，これは S の最小値 d_0 のとり方に矛盾する。
従って，直線 ℓ_0 は $\mathcal{Q}$ の中のちょうど２点だけを通っているので， $(*)$ が成り立つ。この直線 ℓ_0 を含む平面で点 P_0 を通るものが，与えられた点のうちのちょうど３点だけを通る平面になっている。 (証明終)

注意１
上で証明した命題は，実は以下のものです：

> n を４以上の整数とし，空間内に n 個の点が与えられている。ただし，これらの点すべてが同一平面上にあるわけではなく，かつ，どの３点も同一直線上にはないものとする。このとき，n 個の点の どの点についても，この点と他の丁度２個 だけを通る平面が少なくとも１つ ずつ 存在する。

注意２
４点以上を通る直線が存在する場合は，題意が成り立たないことがあるわけですが，３点を通る直線が存在する場合は，題意が成り立つことが簡単に分かります：

> n を４以上の整数とし，空間内に n 個の点が与えられている。ただし，これらの点すべてが同一平面上にあるわけではなく，かつ，丁度３点を含む直線が存在した とする。このとき， n 個の点のうち丁度３点だけを通る平面が少なくとも１つ存在する。

(証明)
与えられた点の集合を $\mathcal{P} = \{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n\}\,(n \geqq 4)$ とし， $\mathcal{P}$ の点を丁度３個含む直線を ℓ とする。
ℓ を含み， $\mathcal{P}$ の他の点を通る平面は，高々 $(n-3)$ 個しかない。これらとは異なる平面で ℓ を含む平面が存在するので，これをとれば良い。 (証明終)

上の命題と問題 **4′**. の結果を合わせると，以下の命題が成り立つことがわかります：

> n を４以上の整数とし，空間内に n 個の点が与えられている。ただし，これらの点すべてが同一平面上にあるわけではなく，かつ，同一直線上にある点は高々３点であるもの とする。このとき， n 個の点のうち丁度３点だけを通る平面が少なくとも１つ存在する。